SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. OBRECHT

PROBLEMI CON CONDIZIONI LATERALI DI TIPO MISTO PER EQUAZIONI PARABOLICHE

I PARTE

25 MARZO 1982

Intendo qui esporre alcuni risultati relativi a problemi al contorno per equazioni paraboliche in un cilindro, nel caso in cui le condizioni sulla superficie laterale siano di tipo misto.

1. IL CASO DELLA "SUPERFICIE DI SEPARAZIONE" CILINDRICA

Avendo a disposizione una teoria per i problemi al contorno di tipo misto per equazioni ellittiche dipendenti da un parametro complesso, è possibile costruirne l'analogo parabolico, purché la geometria del problema considerato sia di tipo cilindrico; dovremo cioè considerare un problema in cui le due regioni, sulle quali si assegnano condizioni al contorno diverse, non variano con t.

Sia Ω un aperto limitato di R^n, $n \geq 3$ (il caso $n = 2$ può essere trattato analogamente, con modifiche solo formali), la cui frontiera Γ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{(\infty)}$, tale che Ω sia localmente da una sola parte di Γ. Sia poi ω una sottovarietà $(n-2)$-dimensionale di Γ di classe $C^{(\infty)}$ che divide Γ in due parti, Γ_1 e Γ_2, tali che $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \omega$.

Consideriamo allora il problema seguente

$$(1.1)\quad \begin{cases} (\partial_t - A(x,\partial_x))u = f, & \text{in } R^+ \times \Omega, \\ B_1(x,\partial_x)u = g_1, & \text{in } R^+ \times \Gamma_1, \\ B_2(x,\partial_x)u = g_2, & \text{in } R^+ \times \Gamma_2, \\ u(0,x) = 0, & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

dove $A(x,\partial_x)$ è un operatore propriamente ellittico del secondo ordine in

Ω, mentre $B_1(x,\partial_x)$ e $B_2(x,\partial_x)$ sono operatori di bordo di ordine ≤ 1 che soddisfano le usuali condizioni di Šapiro-Lopatinskiĭ rispetto ad $A(x,\partial_x)$.

Effettuando formalmente una trasformata di Laplace (senza preoccuparsi per il momento delle condizioni di compatibilità), il problema (1.1) si trasforma nel problema ellittico dipendente da un parametro

$$(1.2)\quad \begin{cases} (p - A(x,\partial_x))\tilde{u} = \tilde{f}, & \text{in } \Omega, \\ B_1(x,\partial_x)\tilde{u} = \tilde{g}_1, & \text{in } \Gamma_1, \\ B_2(x,\partial_x)\tilde{u} = \tilde{g}_2, & \text{in } \Gamma_2, \end{cases}$$

dove con $\tilde{u}$ si è indicata la trasformata di Laplace di u. Ponendo $p = q^2$, con $|\arg q| \leq \frac{\pi}{4}$, il problema (1.2) diventa un problema del tipo considerato nel seminario precedente e, quindi, a esso sono applicabili i metodi di Višik e Eskin.

Risulta perciò naturale cercare di risolvere il problema (1.1) negli spazi che si ottengono mediante una antitrasformata di Laplace dagli spazi $H_{(s,-1,1)}$.

A questo scopo, cominciamo col definire gli spazi parabolici "di ordine fisso".

Siano, $s,1,\gamma \in R$; indicheremo con $H_{\frac{s}{2};s,-1,1;\gamma}(R \times \Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u tali che

$$\|u\|^2_{\frac{s}{2};s,-1,1;\gamma} = \int_{R^n} [\tilde{u}(\gamma + i\sigma, \cdot)]^2_{s,-1,1}\, d\sigma < +\infty ,$$

dove la norma $[\cdot]_{s,-1,1}$ è definita in R^n da

$$[v(\gamma+i\sigma,\cdot)]^2_{s,-1,1} = \int_{R^n} (|\gamma+i\sigma|^2+|\xi|^2)^s(|\gamma+i\sigma|^2+|\xi'|^2)^{-1} \cdot$$

$$\cdot\, (|\gamma+i\sigma|^2+|\xi''|^2)^1 |\hat{v}(\gamma+i\sigma,\xi)|^2\, d\xi$$

e in Ω per passaggio al quoziente; qui, $\hat{v}$ indica la trasformata di Fourier di v e $\xi'' = (\xi_1,\dots,\xi_{n-2})$, $\xi' = (\xi'',\xi_{n-1})$, $\xi = (\xi',\xi_n)$.

In modo analogo si definiscono gli spazi a due indici $H_{\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha,\beta;\gamma}(R \times R^{n-1})$, dai quali si ottengono, per carte locali indipendenti da t, gli analoghi spazi in $R \times \Gamma$.

Se $s > k + \frac{1}{2}$, le distribuzioni di $H_{\frac{s}{2};s,-1,1;\gamma}(R \times R^n)$ hanno la traccia di ordine k sull'iperpiano $x_n = 0$ e questa appartiene a $H_{\frac{s-k-\frac{1}{2}}{2};s-1-k-\frac{1}{2},1;\gamma}(R \times R^{n-1})$; inoltre, esiste un rilevamento continuo in questi spazi.

Più complicato è, invece, lo spazio delle tracce temporali. Sia, infatti,

$$\mu^{(k)}_{s,1}(\xi) = \left(\int_R \tau^{2k}(1+|\tau|+|\xi|^2)^{-s}(1+|\tau|+|\xi'|^2)^{1}(1+|\tau|+|\xi''|^2)^{-1}\, d\tau\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Questa è una funzione peso nel senso di Volevič-Panejah [5]; posto $Y^{(k)}_{s,1}(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni u per le quali

$$\int_{R^n} |\mu^{(k)}_{s,1}(\xi)\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty,$$

lo spazio delle tracce temporali di ordine k delle distribuzioni di $H_{\frac{s}{2};s,-1,1;\gamma}(R \times R^n)$ risulta essere, se $s > 2k + 1$, lo spazio $Y^{(k)}_{s,1}(R^n)$.

Per introdurre gli spazi parabolici a indici variabili, utilizzeremo le stesse notazioni introdotte nel seminario precedente. In particolare, siano W un fissato intorno (in $\overline{\Omega}$) di ω; s,1 funzioni continue in $\overline{\Omega}$, costanti fuori da W; $\{V_1,\dots,V_m\}$ un ricoprimento aperto di $\overline{\Omega}$, tale che in ogni V_j sia definito un sistema di coordinate locali h_j soddisfacente

le proprietà colà richieste. Se $\{\phi_1,\dots,\phi_m\}$ è una partizione dell'unità $C^{(\infty)}$ subordinata al ricoprimento $\{V_1,\dots,V_m\}$, diremo che $u \in H_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(R \times \Omega)$ se

$$\sum_{j=1}^{m} \|(\phi_j u)o\, h_j^{-1}\|^2_{s_j/2;s_j,-1_j,1_j;\gamma} < +\infty .$$

Gi spazi su cilindri di altezza finita o semiinfinita vengono definiti per passaggio al quoziente.

Prima di enunciare un teorema di esistenza e unicità per il problema 1.1, dobbiamo ancora affrontare il problema della compatibilità per $t = 0$ dei dati del problema.

Sia $\psi \in H_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(]0,\beta[\times \Omega)$, dove $0 < \beta \leqq +\infty$. Indichiamo con ψ° il prolungamento di ψ a $]-\infty,\beta[\times \Omega$, ottenuto ponendo $\psi^\circ(t,x) = 0$, se $t \leqq 0$. Diremo allora che ψ è compatibile con 0 per $t = 0$ se $\psi^\circ \in H_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(]-\infty,\beta[\times \Omega)$. Una analoga definizione viene data per le funzioni definite su $]0,\beta[\times \Gamma$.

Osserviamo che le funzioni appartenenti a $C_0^{(\infty)}(]0,\beta] \times \overline{\Omega})$ sono dense nell'insieme delle funzioni di $H_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(]0,\beta[\times \Omega)$ compatibili con zero per $t = 0$.

Nel seguito supporremo sempre che le funzioni $s,1$ soddisfino le seguenti proprietà:

a) $|s_j - s_k| < \frac{1}{4}$, $|1_j - 1_k| < \frac{1}{4}$, se $\operatorname{supp} \phi_j \cap \operatorname{supp} \phi_k \neq \emptyset$;

b) $k < s_j - 1_j < k + 1$, se $\operatorname{supp} \phi_j \cap \omega \neq \emptyset$.

Qui k è un numero reale che dipende solo dagli operatori di bordo B_1 e B_2 e che risulta essere uguale a zero nel caso del problema Dirichlet-Dirichlet, uguale a $\frac{1}{2}$ nel caso del problema Dirichlet-Neumann e uguale a

1 nel caso del problema Neumann-Neumann.

Il seguente risultato di esistenza e unicità per la soluzione del problema (1.1) è dovuto essenzialmente a Gjul'misarjan [4].

Teorema 1.1. Nelle ipotesi fatte, esiste $\gamma_0 \in R^+$, tale che, se $\gamma > \gamma_0$, $\forall f \in H_{(\frac{s-2}{2};s-2,-1,1);\gamma}(R^+ \times \Omega)$,

$\forall g_i \in H_{(\frac{s-k_i-\frac{1}{2}}{2};s-1-k_i-\frac{1}{2},1);\gamma}(R^+ \times \Gamma_i)$, $i = 1,2$, compatibili con zero per $t = 0$, esiste una e una sola $u \in H_{(\frac{s}{2};s,-1,1);\gamma}(R^+ \times \Omega)$, compatibile con zero per $t = 0$, soluzione del problema

$$\begin{cases} (\partial_t - A(x,\partial_x))u = f, & \text{in } R^+ \times \Omega , \\ B_i(x,\partial_x)u = g_i , & \text{in } R^+ \times \Gamma_i , \quad i = 1,2. \end{cases}$$

Inoltre u soddisfa la naturale stima a priori.

Il risultato precedente può essere esteso al caso in cui gli operatori A, B_1, B_2 dipendono da t, utilizzando una tecnica parzialmente analoga a quella di Agranovič-Višik ([1], Cap. II, Par. 12).

Il procedimento si effettua nel modo seguente:

1) Dal Teorema 1.1 segue l'esistenza (e si dimostra l'unicità) del problema a coefficienti indipendenti da t in $[\alpha,\beta] \times \Omega$, dove $0 \leq \alpha < \beta \leq T$, con T fissato. Inoltre, la costante della stima a priori dipende solo da T, ma non da α e da β.
2) Si mostra che, se $a \in C^{(\infty)}$, la norma di $(a(t,x) - a(\alpha,x))u$ può essere resa piccola, uniformemente in α, se $t-\alpha$ è sufficientemente piccolo.
3) Da quanto precede e dall'esistenza della soluzione nel caso dei coefficienti costanti, si ottiene l'esistenza nel caso dei coefficienti

variabili per cilindri di altezza sufficientemente piccola e con la costante della stima a priori indipendente dalla posizione della base e dall'altezza del cilindro.

4) Si affetta ora il cilindro (di altezza finita) in strati di altezza δ sufficientemente piccola. Sia u_1 la soluzione, che esiste per 3), del problema in $]0,\delta] \times \Omega$ e sia lu_1 un suo prolungamento a $]0,2\delta] \times \Omega$. In $]\delta,2\delta] \times \Omega$ si considera il problema

$$\begin{cases} (\partial_t - A(t,x,\partial_x))u = f-(\partial_t - A(t,x,\partial_x))lu_1, & \text{in }]\delta,2\delta] \times \Omega , \\ B_1(t,x,\partial_x)u = g_1 - B_1(t,x,\partial_x)lu_1 & , \text{in }]\delta,2\delta] \times \Gamma_1 , \\ B_2(t,x,\partial_x)u = g_2 - B_2(t,x,\partial_x)lu_2 & , \text{in }]\delta,2\delta] \times \Gamma_2 . \end{cases}$$

Poiché i dati di questo problema sono compatibili con zero per $t = \delta$, esso ha una soluzione u_2 compatibile con zero per $t = \delta$. Allora $lu_1 + u_2^\circ$ è soluzione del problema originario in $]0,2\delta] \times \Omega$. Iterando un numero finito di volte il procedimento si ottiene la soluzione in tutto il cilindro. Dalle stime a priori nei singoli strati si ottiene la stima a priori globale che fornisce anche l'unicità.

Si ottiene pertanto il Teorema seguente (ometteremo γ nell'in dicare gli spazi, in quanto questi non dipendono da γ nei cilindri di altezza finita).

<u>Teorema 1.2</u>. Sia $T > 0$. Supponiamo che $A(t,x,\partial_x)$ sia un operatore propriamente ellittico del secondo ordine a coefficienti $C^{(\infty)}$ in $[0,T] \times \overline{\Omega}$ e che $B_i(t,x,\partial_x)$ sia un operatore differenziale frontiera a coefficienti $C^{(\infty)}$ il cui ordine $k_i (\leq 1)$ sia indipendente da $t (i = 1,2)$. Se gli operatori $A(\overline{t},x,\partial_x)$ e $B_i(\overline{t},x,\partial_x)$ soddisfano tutte le ipotesi del Teorema 1.1, $\forall\, \overline{t} \in [0,T] \times \overline{\Omega}$, e se il numero k colà introdotto non dipende da t, allora

$$\forall\ f \in H_{(\frac{s-2}{2};s-2,-1,1)}(]0,T[\ \times \Omega)\ ,$$

$$\forall\ g_i \in H_{(\frac{s-k_i-\frac{1}{2}}{2};s-1-k_i-\frac{1}{2},1)}(]0,T[\ \times \Gamma_i),$$

$i = 1,2$, compatibili con zero a $t = 0$, esiste una sola $u \in H_{(\frac{s}{2};s,-1,1)}(]0,T[\ \times \Omega)$, compatibile con zero per $t = 0$, soluzione del problema

$$\begin{cases} (\partial_t - A(t,x,\partial_x))u = f, & \text{in }]0,T]\ \times \Omega\ , \\ B_i(t,x,\partial_x)u = g_i, & \text{in }]0,T]\ \times \Gamma_i,\ i = 1,2. \end{cases}$$

Inoltre, u soddisfa l'usuale stima a priori.

2. IL CASO DELLA "SUPERFICIE DI SEPARAZIONE" NON CILINDRICA

Poniamo ora $\Sigma = [0,T] \times \partial\Omega$ e siano $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\Sigma_2 = \Sigma - \overline{\Sigma}_1$. Consideriamo un problema analogo a quello considerato nel paragrafo precedente, senza però supporre che Σ_1 e Σ_2 siano dei cilindri.

Utilizzando metodi astratti, Baiocchi ([2], [3]) ha ottenuto risultati per questo tipo di problema senza fare alcuna ipotesi su Σ_1. Un risultato tipico è il seguente ([3], Teor. 4.2).

Teorema 2.1. Per ogni $f \in L^2(]0,T[\ \times \Omega)$ e per ogni $u_o \in L^2(\Omega)$, esiste una e una sola u, tale che:

a) u, $\partial_{x_j} u \in L^2(]0,T[\ \times \Omega)$, $\partial_t u \in L^2(]0,T[;\ H^{-1}(\Omega))$;

b) $\partial_t u - \Delta u + u = f$, nel senso delle distribuzioni su $]0,T[\ \times \Omega$;

c) $\lim_{t\to 0} \| u(t,\cdot)-u_o;\ L^2(\Omega)\| = 0$;

d) $u/\Sigma_1 = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} / \Sigma_2 = 0$.

Le condizioni d) vanno intese nel senso seguente.

Si può provare che u possiede una traccia su Σ che appartiene a $H_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)$; dire che $u/\Sigma_1 = 0$ significa allora che esiste (u_k) succ. in $C(\Sigma)$, $u_k/\Sigma_1 = 0$, tale che $u_k \to u$ in $H_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\Sigma)$. Inoltre, u possiede la traccia del primo ordine su Σ che appariente a $H_{-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}}(\Sigma)$; allora dire che $\frac{\partial u}{\partial \nu} / \Sigma_1 = 0$ significa che $\mathrm{supp}(\frac{\partial u}{\partial \nu} / \Sigma) \subset \overline{\Sigma_1}$.

Vediamo ora come, facendo alcune ipotesi su Σ_1, sia possibile ottenere dei risultati di regolarità analoghi a quelli del n. 1.

Supponiamo che Σ_1 sia un sottoinsieme connesso e relativamente aperto di Σ, la cui frontiera γ è una varietà connessa $C^{(\infty)}$ e di dimensione n - 1 con bordo $\partial\gamma$, tale che $\partial\gamma = \partial\Sigma \cap \gamma$. Supponiamo inoltre che γ non sia mai tangente agli iperpiani t = costante.

Per trattare questo problema, si costruisce un diffeomorfismo che "cilindrizza" γ in modo da ricondursi al caso considerato nel n. 1. Si ha il seguente risultato.

<u>Teorema 2.2.</u> Nelle ipotesi sopra specificate, esiste un diffeomorfismo r di $[0,T] \times \overline{\Omega}$ su di sè, che gode delle seguenti proprietà:

a) $r(\Sigma) = \Sigma$;

b) $r(\gamma) = [0,T] \times \{y \in \overline{\Omega};\ (0,y) \in \gamma\}$;

c) $r(\{t\} \times \overline{\Omega}) = \{t\} \times \overline{\Omega}, \forall t \in [0,T]$.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(\bar{t},\bar{x}) \in \gamma$, $0 < \bar{t} < T$; per le ipotesi fatte su γ, esistono un intorno $U_{(\bar{t},\bar{x})}$ di $(\bar{t},\bar{x})$ in $]0,T[\times \overline{\Omega}$ e un diffeomorfismo $C^{(\infty)}$ $\phi_{(\bar{t},\bar{x})} : U_{(\bar{t},\bar{x})} \to R \times \overline{R^n_+}$, tale che:

$$\phi_{(\bar{t},\bar{x})}(t,x) = (t,\psi_{(\bar{t},\bar{x})}(t,x)); \ \phi_{(\bar{t},\bar{x})}(U_{(\bar{t},\bar{x})} \cap \Sigma) \subset R \times R^{n-1} \times \{0\};$$

$$\phi_{(\bar{t},\bar{x})}(U_{(\bar{t},\bar{x})} \cap \gamma) \subset R \times R^{n-2} \times \{(0,0)\};$$

$(\phi_{(\bar{t},\bar{x})})^{-1}(\tau,y) = (\tau,\chi(\tau,y') + y_n\, \nu(\chi(\tau,y')))$, dove χ è un sistema di coordinate di Σ e ν è la normale unitaria a Σ interna a $[0,T] \times \Omega$; la $(n-1)$-esima componente di $\phi_{(\bar{t},\bar{x})}(t,x)$ è uguale alla distanza geodetica su Σ fra la proiezione ortogonale di (t,x) su Σ e $\gamma \cap \{(t,z);\ z \in \overline{\Omega}\}$.

Con lievi modifiche si possono trattare anche i casi $\bar{t} = 0$ e $\bar{t} = T$. Sia $\{U_j;\ j = 1,\ldots,m\}$ un sottoricoprimento finito di $\{U_{(\bar{t},\bar{x})};\ (\bar{t},\bar{x}) \in \gamma\}$ e siano $\phi_1,\ldots,\phi_m$ i corrispondenti diffeomorfismi.

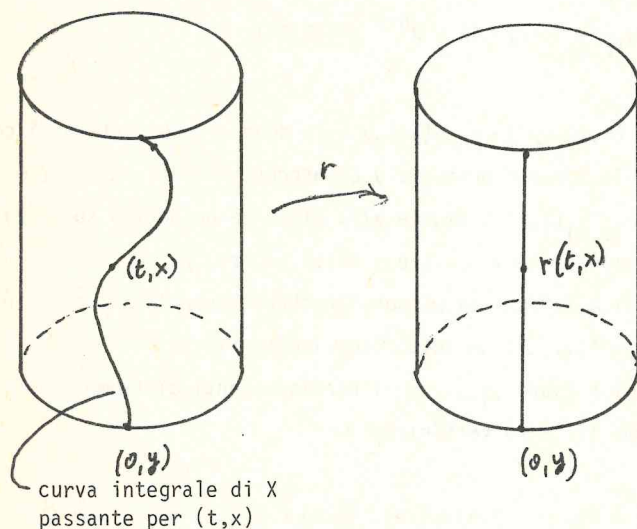
Definiamo il campo vettoriale

$$X_j(t,x) = d\phi_j^{-1}(\phi_j(t,x))(1,0),\ (t,x) \in U_j,\quad j = 1,\ldots,m\ ;$$

sia $\{\omega_j;\ j = 1,\ldots,m\}$ una partizione dell'unità $C^{(\infty)}$ subordinata al ricoprimento $\{U_j;\ j = 1,\ldots,m\}$ e prolunghiamo le ω_j con zero a tutto $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Posto poi $\omega_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} \omega_j$, definiamo il campo vettoriale

$$X(t,x) = \omega_0(t,x)(1,0) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j(t,x)\ X_j(t,x).$$

E' evidente che X è tangente a Σ su Σ ed è tangente a γ su γ; inoltre, la sua componente temporale è sempre uguale a 1. Sia $\eta(\cdot,x)$ la curva integrale di X passante per il punto $(0,x)$, $x \in \overline{\Omega}$. Poiché X è tangente a Σ su Σ, $\eta(\cdot,x)$ può essere prolungata a tutto $[0,T]$. Poiché per ogni punto di $[0,T] \times \overline{\Omega}$ passa una e una sola curva integrale di X, pos-

siamo definire una biiezione r da $[0,T] \times \overline{\Omega}$ su se stesso, ponendo $r(t,x) = (t,y)$, dove y è tale che $\eta(t,y) = (t,x)$. Dal Teorema di regolarità per il flusso di un campo vettoriale segue che r e r^{-1} sono $C^{(\infty)}$. Inoltre, dalle proprietà di X segue che $r(\Sigma) = \Sigma$ e che $r(\gamma) = [0,T] \times \{y \in \overline{\Omega}; (0,y) \in \gamma\}$.

Introduciamo ora gli spazi nei quali risolveremo il nostro problema. Indichiamo con $R_{(s/2;s,-1,1)}(]0,T[\times \Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u per le quali $u \circ r^{-1} \in H_{(s/2;s,-1,1)}(]0,T[\times \Omega)$. Una definizione analoga viene data per gli spazi di bordo $R_{(\frac{\alpha+\beta}{2};\alpha,\beta)}(]0,T[\times \partial\Omega)$. Qui e nel seguito r indica il diffeomerfismo costruito nel Teorema 2.2.

Diremo poi che una funzione $u \in R_{(s/2;s,-1,1)}(]0,T[\times \Omega)$ è compatibile con zero per $t = 0$ se $u \circ r^{-1}$ è compatibile con zero per $t = 0$ nello spazio $H_{(s/2;s,-1,1)}(]0,T[\times \Omega)$. Una definizione analoga viene data per gli spazi di bordo. Dalla analoga proprietà per gli spazi H, segue che l'insieme delle funzioni di $C_0^{(\infty)}(]0,T] \times \overline{\Omega})$ è denso nell'insieme delle funzioni di $R_{(s/2;s,-1,1)}(]0,T[\times \Omega)$ che sono compatibili con

zero per $t = 0$.

Possiamo ora enunciare il seguente risultato.

Teorema 2.3. Siamo $A(t,x,\partial_x)$ un operatore propriamente ellittico del secondo ordine a coefficienti $C^{(\infty)}([0,T] \times \overline{\Omega})$ e $B_i(t,x,\partial_x)$ un operatore differenziale frontiera a coefficienti $C^{(\infty)}$ il cui ordine $k_i (\leq 1)$ è indipendente da t; supponiamo che $B_i(t,x,\partial_x)$ copra $A(t,x,\partial_x)$ su $\overline{\Gamma_i}$ ($i = 1,2$). Supponiamo inoltre che il numero k introdotto prima del Teorema 1.1 sia indipendente da t e scegliamo le funzioni s,l in modo che - oltre alle solite condizioni - risulti $k < s_j - l_j < k + 1$, se $\mathrm{supp}\, \phi_j \cap \gamma \cap \{(0,x);\ x \in \overline{\Omega}\} \neq \emptyset$. Allora,

$$\forall f \in R_{(\frac{s-2}{2};s-2,-1,l)}(]0,T[\times \Omega),$$

$$\forall g_i \in R_{(\frac{s-k_i-\frac{1}{2}}{2};s-l-k_i-\frac{1}{2},l)}(\Sigma_i),$$

$i = 1,2$, compatibili con zero per $t = 0$, esiste una e una sola $u \in R_{(s/2;s,-1,l)}(]0,T[\times \Omega)$, compatibile con zero per $t = 0$, soluzione del problema

$$\begin{cases} (\partial_t - A(t,x,\partial_x))u = f, & \text{in }]0,T] \times \Omega , \\ B_i(t,x,\partial_x)u = g_i \quad , & \text{in } \Sigma_i, \quad i = 1,2 . \end{cases}$$

La dimostrazione segue subito dai Teoremi 1.1 e 2.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.S. AGRANOVIČ-M.I. VIŠIK: Elliptic Problems with a Parameter and Parabolic Problems of General Type, Russian Math. Surveys, 19 (1964), n. 3, pp. 53-157.

[2] C. BAIOCCHI: Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 36 (1966), pp. 80-121.

[3] C. BAIOCCHI: Problemi misti per l'equazione del calore, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 41 (1971), pp. 19-54.

[4] A.G. GJUL'MISARJAN: Sui problemi al contorno generali discontinui per equazioni ellittiche con parametro e sulle equazioni paraboliche del secondo ordine, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR, Ser. Mat., 5 (1970), 3-31 (in russo).

[5] L.P. VOLEVIČ-B.P. PANEJAH: Certain Spaces of Generalized Functions and Embedding Theorems, Russian Math. Surveys, 20 (1965), n. 1, pp. 1-73.